

DOI: 10.7652/xjtuxb201701002

利用共形几何代数的串联机器人 位置逆解求解方法

黄昔光, 黄旭, 李启才

(北方工业大学机械与材料工程学院, 100144, 北京)

摘要: 为获得串联机器人位置逆解的解析解,使用共形几何代数对串联机器人位置逆解进行了研究。利用共形几何代数中基本几何元素的内积和外积运算,获得串联机器人各关节点的位置,然后通过构造经过关节点的直线与直线以及平面与平面的内积,求解出机器人所有关节转角,从而直接获得了串联机器人位置逆解的解析解。该方法求解简捷,几何直观性好,避免了经典机器人运动学理论中欧拉角、矩阵的运算以及复杂的多元高次非线性方程组求解,求解过程和结果可以明显地反映机器人几何结构与机器人运动之间的几何关系。以一种空间 6R 串联机器人位置逆解为例进行了求解,算例计算表明该方法正确、有效,计算效率提高了近 44 倍。

关键词: 共形几何代数;串联机器人;位置逆解

中图分类号: TH112 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2017)01-0009-04

Inverse Displacement Solutions of Serial Robot Based on Conformal Geometric Algebra

HUANG Xiguang, HUANG Xu, LI Qicai

(School of Mechanical and Materials Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

Abstract: To obtain all close-form solutions of the inverse displacement problem of a 6R serial robot, a novel method based on conformal geometric algebra (CGA) is presented. The positions of joint points are obtained by the inner product and outer product of the basic geometric entities in CGA. Then all joint rotating angles are computed by the inner product between line and line or plane and plane, and all closed-form solutions are obtained. The presented algorithm is simple and avoids the computations of rational angles, matrices, and complex nonlinear equations. The computation process and results can interpret geometrically the relationship between the geometric structure and the motion of the robot. Finally, a numerical example is solved by the algorithm and the results show that the algorithm is valid and the computational efficiency is improved by nearly 44 times.

Keywords: conformal geometric algebra; serial robot; inverse displacement solution

串联机器人位置逆解就是已知机器人操作末端
操作器的位置和姿态,求解机器人各个关节变量^[1],
是机器人实时控制中必须解决的基本问题。该问题

的求解存在方程参数多、解的非线性和强耦合性、过
程复杂等问题,一直是国内外研究的热点^[2]。目前,
求解串联机器人位置逆解的主要方法有球面三角

法^[3]、齐次坐标变换矩阵法^[4]、倍四元数法^[5-6]等。上述数学方法的求解过程基本上都必须先使用不同的数学建模方法将机器人位置逆解问题转化为高次非线性代数方程组问题,然后再应用方程组求解技巧进行求解,求解过程和求得的解很难从几何上揭示机器人几何结构与机器人运动之间的数学关系,缺乏几何直观性,难以理解和掌握。因此,研究具有几何直观性的串联机器人位置逆解新算法具有重要的理论意义和工程价值。

共形几何代数(CGA)是最近几年出现的几何表示与计算系统^[6-7],已被应用于计算机图形学等领域^[8-9],以及结构简单的 SCARA 机器人机构位置逆解求解^[10]。本文将 CGA 引入结构更加复杂的空间串联机器人的机构运动学位置逆解,基于 CGA 提出了一种空间 6R 串联机器人位置逆解的求解方法,求解过程简捷,具有较强的几何直观性。

1 共形几何代数基础

共形几何代数有内积、外积以及几何积共 3 种运算。向量 u 与 v 的几何积定义为

$$uv = u \cdot v + u \wedge v \tag{1}$$

式中:“ $\cdot$ ”表示内积运算;“ $\wedge$ ”表示外积运算。2 种运算定义为

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(uv + vu) \tag{2}$$

$$u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu) \tag{3}$$

向量 A 的对偶 A^* 可表示为

$$A^* = -AI \tag{4}$$

式中: I 为伪标量。对于三维欧氏空间,有

$$I = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

式中: $e_i(i=1,2,3)$ 是三维欧氏空间的规范正交基。

对于一组规范正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_0, e_\infty\}$,有

$$\left. \begin{aligned} e_1^2 &= e_2^2 = e_3^2 = 1 \\ e_0^2 &= e_\infty^2 = 0 \\ e_\infty \cdot e_0 &= -1 \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

式中: e_0 表示原点; e_∞ 表示无穷远点。

共形几何代数中常见的几何体内积和外积表达式如表 1 所示^[8]。

表 1 中, X_i 表示 CGA 中不同的点, S_i 表示不同的球, π_i 表示不同的平面, X 表示为

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

式中: x_1, x_2, x_3 为欧氏空间点的 x, y, z 坐标值。

直线与平面夹角 θ 的余弦的 CGA 表达式为

$$\cos\theta = \frac{O_1^* \cdot O_2^*}{|O_1^*| |O_2^*|} \tag{6}$$

式中: O_1, O_2 为直线或平面的表达式; O_1^*, O_2^* 为对应几何体的外积表达式。

表 1 CGA 基本几何元素的表达式

元素	内积表达式	外积表达式
点	$P = X + \frac{1}{2}X^2 e_\infty + e_0$	
球	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4$
面	$\pi = n + d e_\infty$	$\pi^* = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge e_\infty$
圆	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$
线	$l = \pi_1 \wedge \pi_2$	$l^* = X_1 \wedge X_2 \wedge e_\infty$
点对	$P_p = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$P_p^* = X_1 \wedge X_2$

如果已知一个点对 P_p , 则 P_p 中的点为

$$P_\pm = \frac{\pm (P_p^* \cdot P_p^*)^{1/2} + P_p^*}{e_\infty \cdot P_p^*} \tag{7}$$

式中: P_p^* 为点对 P_p 的外积表达式。

几何体 a 的各种运动变换的 CGA 表达为

$$a' = Va\tilde{V} \tag{8}$$

式中: a' 为几何体 a 变换后的几何体; V 为运动变换(如平移、旋转等)算子; $\tilde{V}$ 为 V 的逆序。

在共形几何代数中,旋转算子可表示为

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = e^{-(\theta/2)I_2} \tag{9}$$

式中: l 为旋转轴线; I_2 是表示旋转平面的单位二矢量; θ 为旋转角度。

平移算子的旋量表示为

$$T = 1 + \frac{1}{2}te_\infty = e^{-(t/2)e_\infty} \tag{10}$$

式中: $t = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3$ 为平移向量。

2 串联机器人位置逆解

应用 CGA 对图 1 所示的空间 6R(R 为转动副)串联机器人位置逆解进行求解,机器人位置逆解的已知和待求参数见表 2。

表 2 逆运动学参数

已知参数	描述	待求参数	描述
P_1	机器人末端位置	$\theta_1 \sim \theta_6$	各关节角度
n	机器人末端方位	$P_1 \sim P_6$	各关节位置
π_1	机器人末端平面		
$L_1 \sim L_6$	各连杆长度		

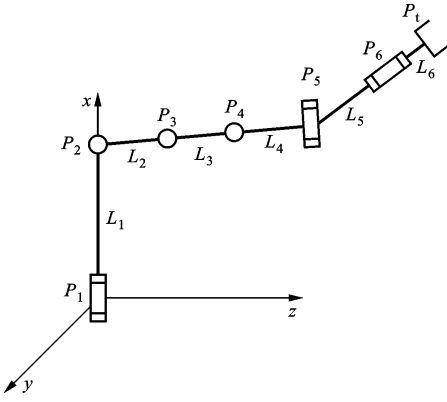


图1 空间6R串联机器人机构示意图

串联机器人位置逆解就是已知末端手抓位置 P_t 和姿态 n, π_t , 求解各关节位置 $P_1 \sim P_6$ 和关节角 $\theta_1 \sim \theta_6$, 求解过程如图2所示。

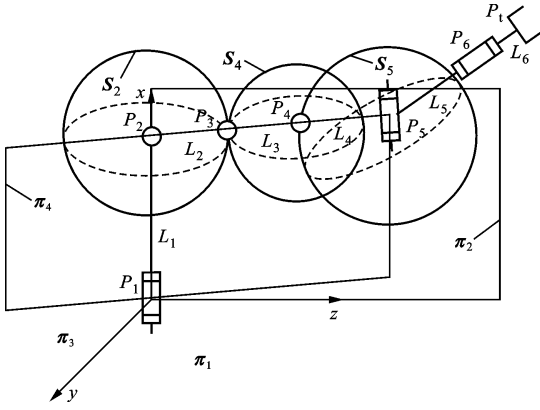


图2 求解各关节点位置过程示意图

2.1 关节 P_1, P_2 的位置

三维欧氏空间中点 P_1 的坐标为 $(0, 0, 0)$, P_2 的坐标为 $(L_1, 0, 0)$, 由表1可知, 对应点的位置为

$$P_1 = e_0 \quad (11)$$

$$P_2 = L_1 e_1 + \frac{1}{2} L_1^2 e_\infty + e_0 \quad (12)$$

2.2 关节 P_5, P_6 的位置

由图2可知, 关节 P_5, P_6 和 P_t 同在手抓末端方向 n 所在的直线上, 由式(10)可得关节 P_6 的平移旋量

$$T_6 = 1 - \frac{1}{2} L_6 n e_\infty \quad (13)$$

由式(8)可知关节 P_6 的位置

$$P_6 = T_6 P_t \tilde{T}_6 \quad (14)$$

同理, 关节 P_5 的平移旋量为

$$T_5 = 1 - \frac{1}{2} (L_5 + L_6) n e_\infty \quad (15)$$

则关节 P_5 的位置

$$P_5 = T_5 P_t \tilde{T}_5 \quad (16)$$

2.3 关节 P_4 的位置

由图2可知, 关节 $P_1 \sim P_5$ 在同一平面 π_4 内, 根据表2有

$$\pi_4^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_5 \wedge e_\infty \quad (17)$$

经过关节 P_5 和手抓末端位置 P_t 的直线 $L_{P_5 P_t}$ 可表示为

$$L_{P_5 P_t}^* = P_5 \wedge P_t \wedge e_\infty \quad (18)$$

直线 $L_{P_5 P_t}$ 在平面 π_4 上的投影^[8]为

$$L_{\text{proj}}^* = \frac{\pi_4^* \cdot L_{P_5 P_t}^*}{\pi_4^*} \quad (19)$$

根据表1, 以关节 P_5 为球心、 L_4 为半径构造的球 S_5 可表示为

$$S_5 = P_5 - \frac{1}{2} L_4^2 e_\infty \quad (20)$$

由直线 L_{proj} 与球 S_5 相交生成点对

$$P_{P_4} = S_5 \wedge L_{\text{proj}} \quad (21)$$

由图2可知, 关节 P_4 为点 P_{P_4} 中的一点, 可根据式(7)从点 P_{P_4} 中选择一点作为关节 P_4 的位置。

2.4 关节 P_3 的位置

由图2可知, 以关节 P_2 为球心、 L_2 为半径的球 S_2 可表示为

$$S_2 = P_2 - \frac{1}{2} L_2^2 e_\infty \quad (22)$$

以关节 P_4 为球心、 L_3 为半径的球 S_4 可表示为

$$S_4 = P_4 - \frac{1}{2} L_3^2 e_\infty \quad (23)$$

球 S_2 和球 S_4 相交可获得圆 Z_3 , 表达式为

$$Z_3 = S_2 \wedge S_4 \quad (24)$$

由图2可知, 关节 P_3 在圆 Z_3 与平面 π_4 相交的点对上, 从而有

$$P_{P_3} = Z_3 \wedge \pi_4 \quad (25)$$

根据式(7)从点 P_{P_3} 中选择一点作为关节 P_3 的位置。

2.5 关节角 θ_i

确定关节 $P_1 \sim P_6$ 的位置后, 可以求得如图2所示的几何体的表达式。由表1有

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &= e_1; & \pi_2 &= e_2 \\ \pi_3 &= e_3; & l_1^* &= P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty \\ l_2^* &= P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty; & l_3^* &= P_3 \wedge P_4 \wedge e_\infty \\ l_4^* &= P_4 \wedge P_5 \wedge e_\infty; & l_5^* &= P_5 \wedge P_6 \wedge e_\infty \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中: l_i 表示过各关节点的直线; π_i 表示 $yo z$ 平面;

π_2 表示 xoz 平面; π_3 表示 xoy 平面。

由图 2 可知, 关节角 θ_1 可表示为平面 π_1 与平面 π_2 的夹角, 关节角 θ_2 可表示为直线 l_2 与平面 π_1 的夹角, 关节角 θ_3 可表示为直线 l_2 与直线 l_3 的夹角, 关节角 θ_4 可表示为直线 l_3 与直线 l_4 的夹角, 关节角 θ_5 可表示为直线 l_4 与直线 l_5 的夹角。由式 (6) 可求得

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{|\pi_4^* \cdot \pi_2^*|}{|\pi_4^*| |\pi_2^*|}; & \cos\theta_2 &= \frac{|l_2^* \cdot \pi_1^*|}{|l_2^*| |\pi_1^*|} \\ \cos\theta_3 &= \frac{|l_2^* \cdot l_3^*|}{|l_2^*| |l_3^*|}; & \cos\theta_4 &= \frac{|l_3^* \cdot l_4^*|}{|l_3^*| |l_4^*|} \\ & & \cos\theta_5 &= \frac{|l_4^* \cdot l_5^*|}{|l_4^*| |l_5^*|} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

第 6 个关节角 θ_6 只改变末端姿态, 从几何上看, θ_6 为前 5 个关节正解构成的平面与抓手平面的夹角, 其求解需借助运动学正解。将由式 (27) 求得的 $\theta_1 \sim \theta_5$ 进行简单的位置正解求解, 即可求得 θ_6 。至此, 获得了该机器人机构的全部解析解。

3 算例验证

对于如图 1 所示的串联机器人, 各连杆参数为 $L_1=100, L_2=80, L_3=60, L_4=50, L_5=40, L_6=30$ 。初始关节角为 $\theta_1=30^\circ, \theta_2=60^\circ, \theta_3=45^\circ, \theta_4=45^\circ, \theta_5=0^\circ, \theta_6=30^\circ$ 。机器人末端操作器位姿的共形几何代数表达式为

$$\left. \begin{aligned} p_t &= 287.238e_1 + 39.726e_2 - 68.808e_3 + \\ &\quad 44\,409.040e_\infty + e_0 \\ \pi_t &= 0.433e_1 + 0.625e_2 + 0.649e_3 + 104.514e_\infty \\ n &= 0.500e_1 + 0.433e_2 - 0.750e_3 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

机器人位置逆解就是已知机器人操作末端操作器的位姿 p_t, π_t 和 n 如式 (28) 所示, 求解各个关节变量 θ_i 。采用前述的方法求解机器人位置逆解, 可获得全部 4 组位置逆解实数解 (见表 3), 且第 1 组解与算例正解求解所得的初始关节角完全一致, 说明计算准确、有效。

使用计算机代数计算系统 Maple16 编程实现上述算法的求解过程。计算机操作系统为 Microsoft Windows XP, CPU 频率为 3.2 GHz, 内存为 2.96 GB。采用文献 [6] 的 Dixon 结式消元法进行求解, 求解结果完全一致, 运算时间为 140.48 s, 而采用本文提出的算法, 运算时间缩短至 3.17 s, 约为前者的 1/44。

表 3 全部 4 组机器人位置实数解 (°)

组号	1	2	3	4
θ_1	30.000	-150.000	30.000	-150.000
θ_2	60.000	120.000	98.227	81.773
θ_3	45.000	-45.000	-45.000	45.000
θ_4	45.000	-45.000	96.773	-96.773
θ_5	0.000	0.000	0.000	0.000
θ_6	30.000	-150.000	30.000	-150.000

4 结 论

基于共形几何代数提出了一种串联机器人位置逆解的求解算法。算法避免了经典机器人运动学理论中欧拉角和矩阵的运算以及复杂的多元高次非线性方程组求解, 求解过程简捷; 求解过程和结果可以明显地反映机器人几何结构与机器人运动之间的几何关系, 具有较强的几何直观性。算例计算表明, 本文提出的方法正确、有效, 计算效率提高了近 44 倍。

参考文献:

[1] 熊有伦, 丁汉, 刘恩沧. 机器人学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1993: 54-60.

[2] FREUDENSTEIN F. Kinematics: past, present, and future [J]. Mechanism and Machine Theory, 1973, 8 (2): 151-161.

[3] DUFF J. Analysis of mechanisms and robot manipulators [M]. London, UK: Edwart Arnold Ltd., 1980: 56-107.

[4] 苏海军, 廖启征, 梁崇高, 等. 基于代数消元的一般 6R 机械手逆运动学实时算法 [J]. 机器人, 1999, 21 (7): 688-693.
SU Haijun, LIAO Qizheng, LIANG Chonggao, et al. Algebraic elimination algorithm for solving the inverse kinematics of general 6R manipulators [J]. Robot, 1999, 21(7): 688-693.

[5] 黄昔光, 廖启征. 空间 6R 串联机器人机构位置逆解新算法 [J]. 北京航空航天大学学报, 2010, 36(3): 295-298.
HUANG Xiguang, LIAO Qizheng. New algorithm for inverse kinematics of 6R serial robot mechanism [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 36(3): 295-298.

[6] QIAO S, LIAO Q, WEI S, et al. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial robot mechanism based on double quaternion [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(2): 193-199.

(下转第 37 页)